MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DEUXIÈME COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

On considère des lancers successifs et indépendants d'un même dé et on s'intéresse aux suites de lancers ayant amené le numéro six avec la fréquence $\frac{1}{6}$ ce qui ne peut évidemment être réalisé que pour un nombre de lancers multiple de 6. La probabilité d'amener le six à un lancer quelconque est désignée par p $(0 < p < 1)$; on posera $q = 1 - p$. Les réponses aux diverses questions pourront différer selon que $p = \frac{1}{6}$ (le dé étant « juste ») ou $p \neq \frac{1}{6}$ (le dé étant « pipé »).

Dans tout le problème n désigne un entier strictement positif.

Pour les calculs numériques demandés aux questions I.3°, II.4° et II.6° non seulement les résultats mais aussi les calculs intermédiaires devront figurer sur la copie de manière claire et lisible.

La précision de la règle à calculs est suffisante mais les candidats peuvent utiliser des tables ou des machines à condition d'arrondir les résultats à 3 chiffres significatifs.

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Étudier les variations de la fonction $f : p \longrightarrow f(p) = \frac{6^6}{5^5} p\,(1-p)^5$ pour p appartenant à l'intervalle $]0, 1[$. Quelles sont les bornes de f? Sont-elles atteintes? On ne demande pas le tracé de la courbe représentative.

I

1° Soit une suite de 6 n lancers. Quelle est la loi de probabilité du nombre X d'apparitions du six? L'événement intéressant, E_n, est celui où ce nombre est n. Quelle est sa probabilité a_n ?

La loi faible des grands nombres donne-t-elle un renseignement sur a_n ? Si oui lequel?

Utiliser, lorsque c'est possible, l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff pour majorer a_n en écrivant :

$$a_n = P_r(X = n) \leqslant P_r(|X - 6np| \geqslant n\,|1 - 6p|).$$

2° Calculer a_n en fonction de p pour $n = 1, 2, 3, 4$; on trouvera notamment $a_3 = 816\,(pq^3)^3$.

3° Dans le cas $p = \frac{1}{6}$ déterminer des valeurs numériques approchées des nombres a_n pour $n = 1, 2, 3, 4$.

4° Quelle est, selon les valeurs de p, la nature de la série de terme général a_n? Selon les cas on pourra utiliser, ou non, la formule de Stirling :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\;\theta_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to +\infty} \theta_n = 1.$$

II

On reprend l'expérience définie au début du I. Soit b_n la probabilité de l'événement F_n : la fréquence de sortie du six prend, pour la première fois, la valeur $\frac{1}{6}$ au bout de $6n$ lancers.

1° Que vaut b_1 ?

Dans une suite de 12 lancers quelles sont les diverses manières dont peut être réalisé l'événement F_2 ? En déduire la valeur de b_2.

2° Montrer que, pour $n \geqslant 2$:

$$a_n = b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_i b_{n-i} + \ldots + a_{n-1} b_1.$$

On citera soigneusement ceux des théorèmes sur les probabilités qui sont, ici, utilisés.

ECOLES AGRONOMIQUES 1960 (II) 1205

3° Calculer b_n en fonction de p pour $n = 1, 2, 3, 4$.

4° Dans le cas $p = \frac{1}{6}$ déterminer des valeurs numériques approchées des quatre nombres calculés à la question précédente.

5° On désigne par A_n et B_n les sommes des n premiers termes des séries (a_n) et (b_n) : $A_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i$; $B_n = \sum_{i=1}^{i=n} b_i$ et par A et B les sommes (si elles existent) de ces séries.

a. Établir, simplement, l'inégalité : $B_n < 1$; peut-on en déduire la nature de la série (b_n) ?

b. Utiliser l'égalité donnée à la question II.2° pour démontrer :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad A_n - B_n < A_n . B_n < A_{2n} - B_{2n} .$$

Quelles conclusions peut-on en tirer quant à la valeur de B ?

6° Au cours d'une partie de dé on associe le nombre $\frac{1}{n}$ à toute suite de lancers telle que la fréquence d'apparition du six prenne, pour la première fois, la valeur $\frac{1}{6}$ au $(6n)^e$ lancer. Définit-on ainsi une variable aléatoire ? Si oui donner un encadrement numérique de son espérance mathématique en prenant comme valeur approchée de la somme de la série la somme des 4 premiers termes. On majorera le reste (négligé) en fonction de $1 - B_4$ et on tiendra compte des incertitudes de calcul.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail